Aufgaben: Führen von folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$  2. $f(x) = x^3 - 4x$  3. f(x)= $\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8$  5. f(x) = $3x^4 + 4x^3$  6. $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

7. f(x) = $\frac{1}{6}(x+1)^2 \cdot (x-2)$

Lösungen:

1. Vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

**1. Ableitungen**

$f'(x) = x^2 - 1$

$f''(x) = 2x$

$f'''(x) = 2$

**2. Symmetrie**

Nur ungerade Exponenten ➔ Punktsymmetrie zum Ursprung

**3. Nullstellen**

$f(x) = 0$

$\frac{1}{3}x^3 - x = 0$

$\frac{1}{3}x\,(x^2 - 3) = 0$ ➔ $x_1 = 0$

$x^2 - 3 = \quad | + 3$

$x^2 = 3 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$

$x_2 = +\sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}$

$N_1$ ( 0 | 0 ), $N_2$ ( $\sqrt{3}$ | 0 ), $N_3$ ( $\sqrt{3}$ | 0 )

**4. Verhalten für |x| → ∞ bzw. x → ± ∞**

Für x → + ∞ gilt: f(x) → + ∞

Für x → - ∞ gilt: f(x) → - ∞

**5. Extremstellen**

$f'(x) = 0$

$x^2 - 1 = 0 \qquad | +1$

$x^2 = 1 \qquad |\sqrt{\ }$

$x_4 = 1, \qquad x_5 = -1$

$f''(1) = 2 > 0$ ➔TP

$f''(-1) = -2 < 0$ ➔HP

$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1) = \frac{2}{3}$

➔ **TP ( 1 | - $\frac{2}{3}$ )    HP ( -1 | $\frac{2}{3}$ )**

**6. Wendestellen**

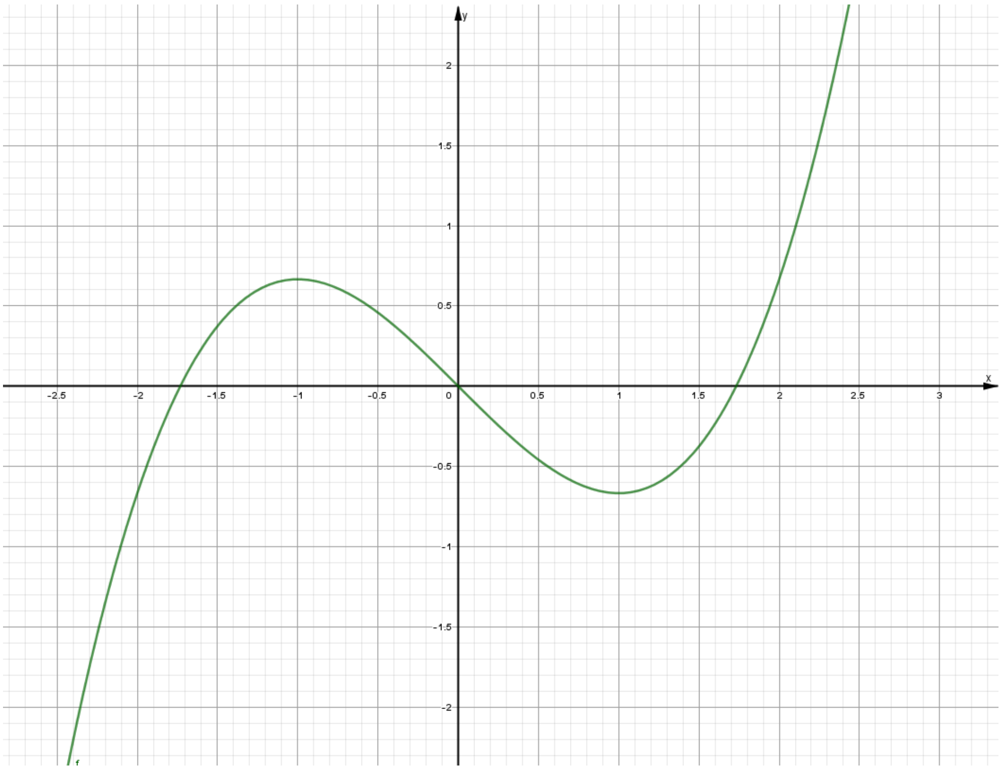
$f''(x) = 2x = 0$ ➔$x_1 = 0$

$f'''(0) = 2$ ➔Wendestelle

$f(0) = 0$

**WP( 0 | 0 )**

**7. Graph**




1. Vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$

**1. Ableitungen**

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

**2. Symmetrie**

Da die Funktion ungerade Exponenten besitzt ist sie symmetrisch zum Ursprung.

**3. Nullstellen**

$f(x) = x^3 - 4x = 0$

$x\,(x^2 - 4) = 0 \qquad => \mathrm{N}_1(0|0)$

$x^2 - 4 = 0 \;\; | + 4$

$x^2 = 4 \;|\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

$=> \mathrm{N}_2(2|0)\,, \qquad \mathrm{N}_3(-2|0)$

**4. Verhalten für $|x| \to \infty$ bzw. $x \to \pm\infty$**

Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$

Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$

**5. Extremstellen**

$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \quad | + 4$

$3x^2 = 4 \quad |: 3$

$x^2 = \frac{4}{3} \quad |\sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 - 4 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = -3{,}08$ => TP $\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -3{,}08\right)$

$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 - 4 \cdot \sqrt{-\frac{4}{3}} = 3{,}08$ => HP $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid 3{,}08\right)$

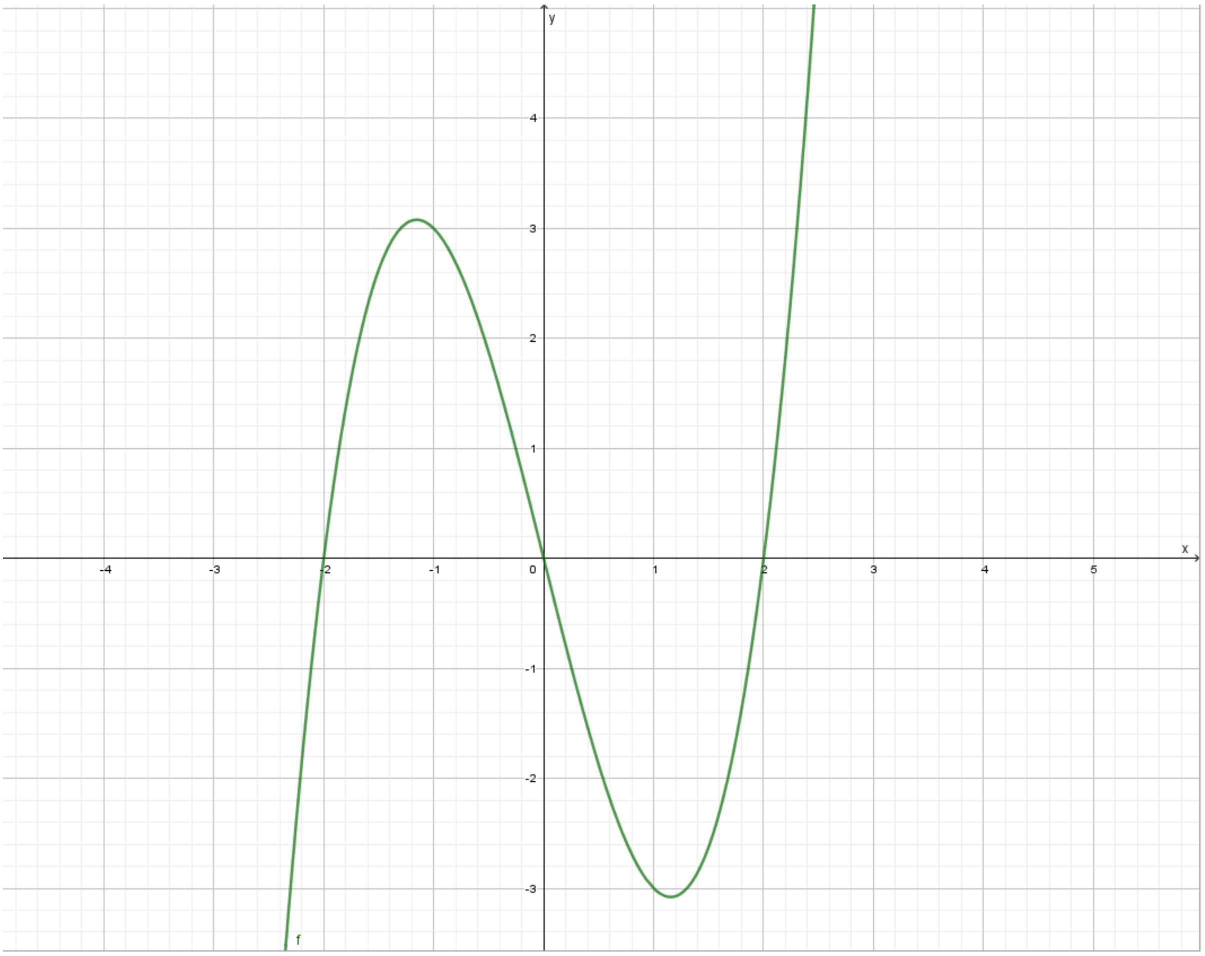
**6. Wendestellen**

$f''(x) = 6x = 0 \quad |:6$

$x = 0$

$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$ => WP $(0|0)$

**7. Graph**




Vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

**1. Ableitungen**

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 8$

$f''(x) = 3x - 8$

$f'''(x) = 3$

**2. Symmetrie**

Sowohl gerade als auch ungerade Exponenten ➔ keine Symmetrie erkennbar

**3. Nullstellen**

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad |\cdot 2$

$\quad = x^3 - 8x^2 + 16x$

$= x(x^2 - 8x + 16)$

$x_1 = 0$ => **$N_1(0|0)$**

$x^2 - 8x + 16 = 0$ |pq-Formel

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16}$

$x_{1,2} = 4 \pm 0$

$x_{1,2} = 4$ => $N_2(4|0)$

**4. Verhalten für $|x| \to \infty$ bzw. $x \to \pm\infty$**

Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$

Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$

**5. Extremstellen**

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 8 = 0$ |: 1,5

$= x^2 - 5{,}3x + 5{,}3$

$x_{1,2} = \frac{5{,}3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5{,}3}{2}\right) - 5{,}3}$

$x_{1,2} = 2{,}67 \pm 1{,}33$

$x_1 = 2{,}67 + 1{,}33 = 4$

$x_2 = 2{,}67 - 1{,}33 = 1{,}34$

$f''(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4 > 0$ => **TP**

$f''(1{,}34) = 3 \cdot 1{,}34 - 8$

$= -3{,}98 < 0$ => **HP**

$y = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4$

$y = 0$ => **TP(4 | 0)**

$y = \frac{1}{2} \cdot 1{,}34^3 - 4 \cdot 1{,}34^2 + 8 \cdot 1{,}34$

$y = 4{,}74$ => **TP (1,34 | 4,74)**

## 6. Wendestellen

$3x - 8 = 0 \qquad |+8\ |:3$

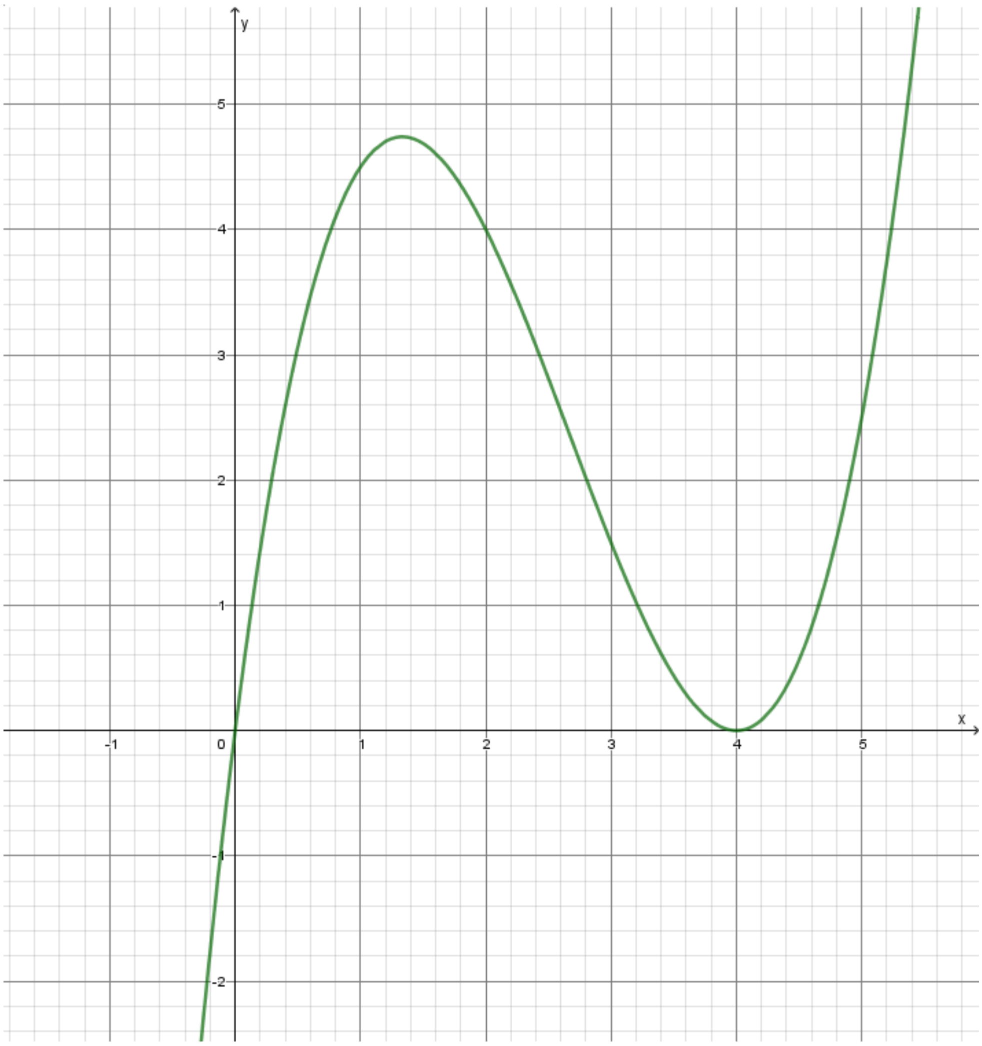
$x = 2,67$

$f'''(2,67) = 3 \neq 0 \Rightarrow x$ ist Wendestelle

$f(2,67) = \frac{1}{2} \cdot 2,67^3 - 4 \cdot 2,67^2 + 8 \cdot 2,67$

$= 2,36 \Rightarrow$ **WP(2,67 | 2,36)**

## 7. Graph



Vollständige Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8$$

1. **Ableitungen**

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x}$$

$$\boldsymbol{f''(x) = 3x + 6}$$

$$f''' = 3$$

**2. Symmetrie**

Sowohl gerade als auch ungerade Exponenten ➔ keine Symmetrie erkennbar

**3. Nullstellen**

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8$ ➔ $x_1 = -2$ $N_1$ $(-2 \mid 0)$

$x^3 + 6x^2 - 16 : (x + 2) = x^2 + 4x - 8$

$- (x^3 + 2x^2)$

$4x^2 + 0$

$-(4x^2 + 8x)$

$-8x - 16$

$- (-8x - 16)$

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \mid \cdot(-1)$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$N_1(-2 \mid 0)$, $N_2(-2+\sqrt{12} \mid 0)$, $N_3(-2-\sqrt{12} \mid 0)$

**4. Verhalten für $|x| \to \infty$ bzw. $x \to \pm\infty$**

Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$

Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$

**5. Extremstellen**

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^3 + 6x = 0$$

$x^2 + 4x = 0$

$x_{4,5} = -2$

$x_4 = 0$ $\quad$ $x_5 = -4$

$f''(0) = 3 \times 0 + 6 = 6 > 0$ ➔ TP $\quad$ $f''(-4) = 3(-4) + 6 = -6 < 0$ ➔ HP

$f(0) = ½ \times 0^3 + 3 \times 0^2 - 8 = -8$

$f(-4) = ½ \times (-4)^3 + 3 \times (-4)^2 - 8 = 8$

➔ **HP (-4 | 8)** $\quad$ **TP (0 | -8)**

**6. Wendestellen**

$f'' = 3x + 6$

$0 = 3x + 6$

$-6 = 3x$

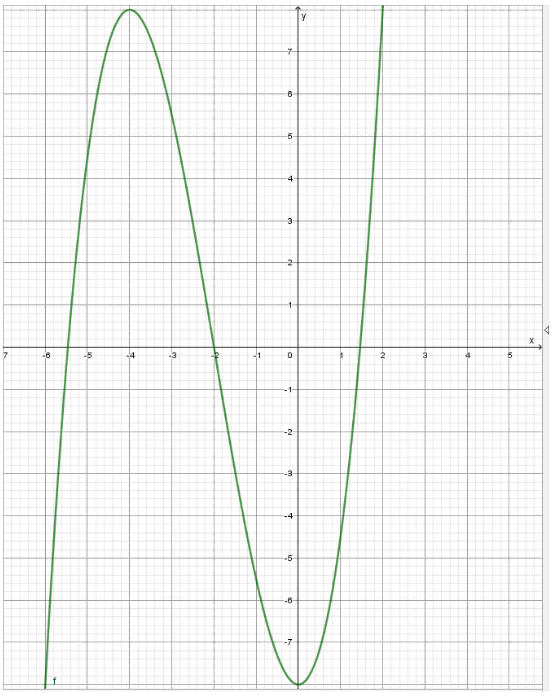
$-2 = x$

$f'''(1) = -6 < 0$ ➔ $x_6$ ist Wendestelle

$½(-2)^3 + 3(-2)^2 - 8 = 0$

WP (-2|0)

**7. Graph**



5. Vollständige Kurvendiskussion der Funktion f(x) = $3x^4 + 4x^3$

**1. Ableitungen**

f‘(x) = $12x^3 + 12x^2$

f‘‘(x) = $36x^2 + 24x$

f‘‘‘(x) = $72x + 24$

**2. Symmetrie**
Sowohl gerade als auch ungerade Exponenten ➔ keine Symmetrie erkennbar

**3. Nullstellen**

f(x) = $3x^4 + 4x^3 = x^3 \cdot (3x + 4)$ $N_1$ (0|0)

$3x + 4 = 0 \quad | -4 \quad | /3$

$x = -\frac{4}{3}$

**4. Verhalten für $|x| \to \infty$ bzw. $x \to \pm\infty$**

Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$
Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$

**5. Extremstellen**

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 0$

$12x^2 \cdot (x + 1) = 0$ $\qquad N_1\ (0|0) \qquad N_2\ (-1|0)$

$f''(0) = 36 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ => keine Extremstelle

$f''(-1) = 36 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) = 36 - 24 = 12 > 0$ $\qquad$ => Tiefpunkt

$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 = 3 - 4 = -1$ $\qquad TP\ (-1|-1)$

**6. Wendestellen**

$f''(x) = 36x^2 + 24x = 0$

$12x \cdot (3x + 2) = 0$ $\qquad N_1(0|0)$

$3x + 2 = 0 \quad | -2 \quad | /3$

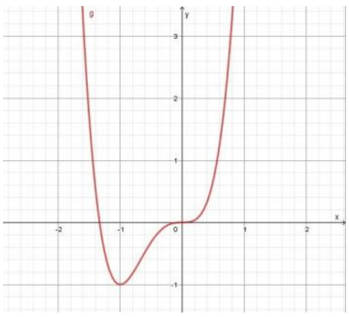
$x = -\frac{2}{3}$ $\qquad N_2\ (-\frac{2}{3}|0)$

$f(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 = 0$ $\qquad WP_1\ (0|0)$

$f(-\frac{2}{3}) = 3 \cdot (-\frac{2}{3})^4 + 4 \cdot (-\frac{2}{3})^3$

$f(-\frac{2}{3}) = -\frac{16}{27}$ $\qquad WP_1\ (-\frac{2}{3}|-\frac{16}{27})$

**7. Skizze**



6. Vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

**1. Ableitungen**

$f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

$f''(x) = 2x^3 - 8x$

$f'''(x) = 6x^2 - 8$

**2. Symmetrie**

Nur ungerade Exponenten ➔ **Punktsymmetrisch zum Ursprung**

**3. Nullstellen**

$f(x) = x(\frac{1}{10}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 6)$ ➔ $x_1 = 0$

**N₁( 0 | 0 )**

$\frac{1}{10}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 6 = 0$

$x^4 - \frac{40}{3}x^2 + 60 = 0$

Substitution: Sei z = $x^2$

$z^2 - \frac{40}{3}z + 60 = 0$

$z_{1,2} = \frac{20}{3} \pm \sqrt{\frac{400}{9} - 60}$

$\frac{400}{9} < 60$ ➔ **Negative Zahl in der Wurzel ➔ keine weitere Nullstelle!**

**4. Verhalten für |x| → ∞ bzw. x → ± ∞**

Für x → + ∞ gilt: f(x) → + ∞

Für x → - ∞ gilt: f(x) → - ∞

**5. Extremstellen**

$f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

$x^4 - 8x^2 + 12 = 0$

$z^2 - 8z + 12$

$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

$f''(\sqrt{6}) = 2(\sqrt{6})^3 - 8\sqrt{6} = (\sqrt{6})^3 - 4\sqrt{6} \approx (2{,}44)^3 - 4 \cdot 2{,}44 \approx 4{,}9 > 0$ ➔ TP

$f''(-\sqrt{6}) = 2(-\sqrt{6})^3 - 8(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 4(-\sqrt{6}) \approx (-2{,}44)^3 - 4 \cdot (-2{,}44) \approx -4{,}9 < 0$ ➔ HP

$f''(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3 - 8\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3 - 4\sqrt{2} \approx (1{,}41)^3 - 4 \cdot (1{,}41) \approx -2{,}83 < 0$ ➔ HP

$f''(-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})^3 - 8(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 4(-\sqrt{2}) \approx (-1{,}41)^3 - 4 \cdot (-1{,}41) \approx 2{,}82 > 0$ ➔TP

$f(\sqrt{6}) = \frac{1}{10}(\sqrt{6})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{6})^3 + 6\sqrt{6} = 3{,}92$

$f(-\sqrt{6}) = \frac{1}{10}(-\sqrt{6})^5 - \frac{4}{3}(-\sqrt{6})^3 + 6(-\sqrt{6}) = -3{,}92$

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}(\sqrt{2})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{2})^3 + 6\sqrt{2} = 5{,}28$

$f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{10}x(-\sqrt{2})^5 - \frac{4}{3}x(-\sqrt{2})^3 + 6(-\sqrt{2}) = -5{,}28$

**TP ( $\sqrt{6}$ | $3{,}92$ )**

**HP ( $-\sqrt{6}$ | $-3{,}92$ )**

**HP ( $\sqrt{2}$ | $5{,}28$ )**

**TP ( $-\sqrt{2}$ | $-5{,}28$ )**

**6. Wendestellen**

$f''(x) = 2x^3 - 8x = 0$

$2x(x^2 - 4) = 0$

$x_1=0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

$f'''(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 = -8 \neq 0$

$f'''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 6 \cdot 4 - 8 = 24 - 8 = 16 \neq 0$

$f'''(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 8 = 6 \cdot 4 - 8 = 24 - 8 = 16 \neq 0$

$f(0) = \frac{1}{10}0^5 - \frac{4}{3}0^3 + 6 \cdot 0 = 0$

$f(2) = \frac{1}{10}2^5 - \frac{4}{3}2^3 + 6 \cdot 2 = 4{,}53$

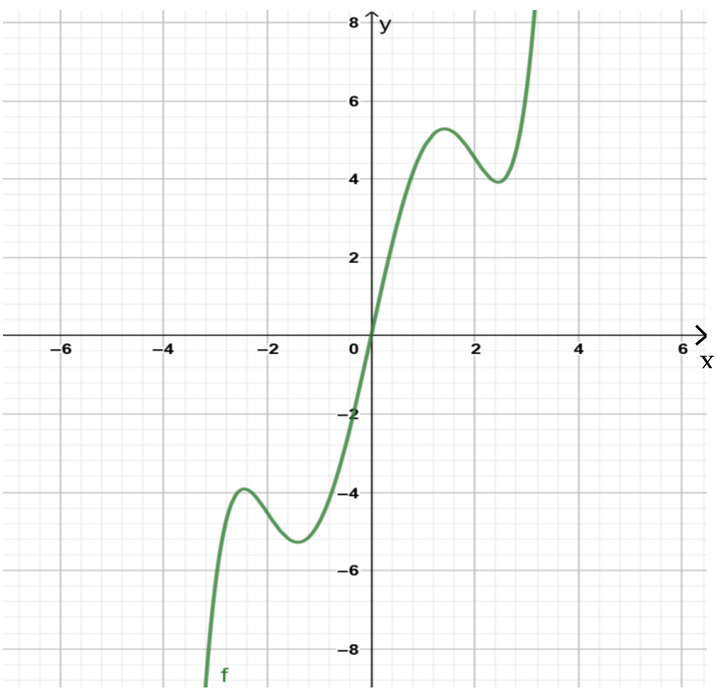
$f(-2) = \frac{1}{10}(-2)^5 - \frac{4}{3}(-2)^3 + 6 \cdot (-2) = -4{,}53$

**WP( 0 | 0 )**

**WP( 2 | 4,53 )**

**WP( -2 | -4,53 )**

**7. Graph**



7. Vollständige Kurvendiskussion der Funktion f(x) = $\frac{1}{6}(x+1)^2 \cdot (x-2)$

1. **Ableitungen**

$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{6}\mathrm{x}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{1}{3}$

$f'(x) = \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}$

$f''(x) = x$

$f'''(x) = 0$

**2. Symmetrie**

Nur gerade Exponenten ➔ Keine Symmetrie Erkennbar

**3. Nullstellen**

$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)$ → $N_1(2 \mid 0)$, $N_2(-1 \mid 0)$

**4. Verhalten für |x| → ∞ bzw. x → ± ∞**

Für x → + ∞ gilt: f(x) → + ∞

Für x → - ∞ gilt: f(x) → - ∞

**5. Extremstellen**

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2$

$1 = \mathrm{x}^2$

$\mathrm{x}_1 = 1$

$\mathrm{x}_2 = -1$

$\mathrm{x}_1 = 1$

$f'(0{,}9) = \frac{1}{2}(0{,}9)^2 - \frac{1}{2} < 0$

$f'(1{,}1) = \frac{1}{2}(1{,}1)^2 - \frac{1}{2} > 0$

$HP(1)$

$\mathrm{x}_2 = -1$

$f'(-0{,}9) = \frac{1}{2}(-0{,}9)^2 - \frac{1}{2} < 0$

$f'(-1{,}1) = \frac{1}{2}(-1{,}1)^2 - \frac{1}{2} > 0$

$TP(-1)$

➔ $HP(1)$ $\quad$ $TP(-1)$

**6. Wendestellen**

$f''(x) = x$
x = 0
$f'''^{(x)} = 0$ ➔ ist Wendestelle
$f(0) = \frac{1}{6}0^3 - \frac{1}{2}0 - \frac{1}{3}$
WP(0|$-\frac{1}{3}$)

**7. Graph**